



17 березня 2016 року

Міжнародний математичний конкурс "Кенгуру"

## Рівень "Випускник"

умови завдань для учнів 11 класу загальноосвітньої школи

Любий друже! Пам'ятай:

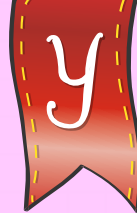
\* за кожну задачу можна отримати від трьох до п'яти балів;

\* за неправильну відповідь бали не знімаються;

\* серед запропонованих варіантів відповідей є лише один правильний;

\* користуватись калькулятором, математичними довідниками чи іншою допоміжною літературою категорично заборонено;

Будь уважний! Тобі під силу віднайти всі правильні відповіді! Бажаємо успіху!



\* **термін виконання завдань – 75 хв.**

### Завдання 1 – 10 оцінюються трьома балами

1  $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} =$

A:  $\frac{3}{111}$

Б:  $\frac{111}{1110}$

В:  $\frac{111}{1000}$

Г:  $\frac{3}{1000}$

Д:  $\frac{3}{1110}$

2 Миколі та Івану разом 23 роки, Івану та Андрію – 24 роки, а Миколі та Андрію – 25 років. Який вік найстаршого хлопця?

A: 10 років

Б: 11 років

В: 12 років

Г: 13 років

Д: 14 років

3  $\frac{20 \cdot 16}{20 : 16} =$

A: 20 – 16

Б: 20 : 16

В: 20<sup>2</sup>

Г: 2<sup>8</sup>

Д: 2<sup>10</sup>

4 Скільки існує цілих чисел, більших 2015 · 2017, але менших 2016<sup>2</sup>?

A: 0

Б: 1

В: 2015

Г: 2016

Д: 2017

5 Нехай  $x, y$  – два різні дійсні числа, що задовольняють умову  $\frac{x}{1 - \frac{y}{x}} + \frac{y}{1 - \frac{x}{y}} = 4$ . Тоді  $x + y =$

A: 1

Б: 2

В: 4

Г: 6

Д: 9

6 Чому дорівнює найменша кількість площин у просторі, що обмежують многогранник?

A: 3

Б: 4

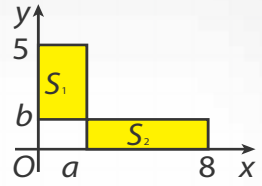
В: 5

Г: 6

Д: 7

7 Чому дорівнює  $32^a$ , якщо  $16^a = 3$ ?  
**А:** 9      **Б:** 6      **В:**  $3\sqrt{3}$       **Г:**  $3\sqrt[4]{3}$       **Д:**  $3\sqrt[5]{3}$

8 Прямокутники  $S_1$  і  $S_2$  (див. мал.) мають рівні площі. Чому дорівнює відношення  $\frac{a}{b}$ ?

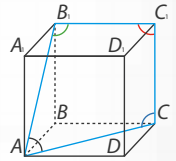


**А:** 1      **Б:**  $\frac{3}{2}$       **В:**  $\frac{4}{3}$       **Г:**  $\frac{7}{4}$       **Д:**  $\frac{8}{5}$

9 Чому дорівнює значення виразу  $x + \frac{2}{x}$ , якщо  $x^2 - 4x + 2 = 0$ ?

**А:** -4      **Б:** -2      **В:** 0      **Г:** 2      **Д:** 4

10 Многогранник  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб. Чому дорівнює сума кутів  $\angle AB_1 C_1 + \angle B_1 C_1 C + \angle C_1 C A + \angle C A B_1$ , позначених на малюнку?



**А:**  $315^\circ$       **Б:**  $330^\circ$       **В:**  $345^\circ$       **Г:**  $360^\circ$       **Д:**  $375^\circ$

## Завдання 11 – 20 оцінюються чотирма балами

11 Ірина розрізала прямокутник площею  $2016 \text{ см}^2$  на 56 рівних квадратів. Довжини сторін прямокутника і квадратів у сантиметрах є цілими числами. Для скількох різних прямокутників дівчинка могла це зробити?

**А:** Для 2-х      **Б:** Для 4-х      **В:** Для 6-и      **Г:** Для 8-и      **Д:** Для жодного

12 Якому із запропонованих у відповідях проміжків належить число  $\sin 2016^\circ$ ?

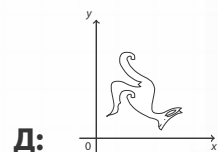
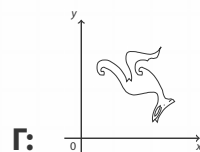
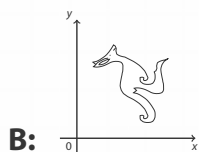
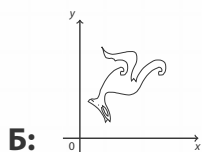
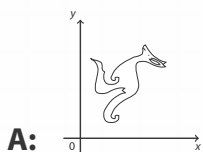
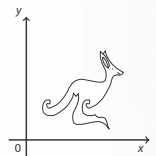
**А:**  $(-1; -\frac{\sqrt{3}}{2})$       **Б:**  $(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$       **В:**  $(-\frac{1}{2}; 0)$       **Г:**  $(0; \frac{1}{2})$       **Д:**  $(0; 1)$

13 На числовій осі зображені точки  $A(9)$  та  $B(39)$ . Точки  $M, N, K$  ділять відрізок  $AB$  на чотири рівні частини. Чому дорівнює середнє арифметичне координат точок  $A, M, N, K, B$ ?



**А:** 18      **Б:** 20,2      **В:** 23,8      **Г:** 24      **Д:** 25,2

14 Множина точок на координатній площині, що задовольняють умову  $F(x, y) = 0$ , має вигляд фрагменту емблеми конкурсу «Кенгуру» (див. мал.). Який із малюнків, запропонованих у відповідях, зображає множину точок, що задовольняють умову  $F(y, x) = 0$ ?



15 У прямокутнику  $ABCD$  довжина сторони  $BC$  дорівнює половині довжини діагоналі  $AC$ . Точка  $M$  належить стороні  $CD$  і  $AM = MC$ . Чому дорівнює величина кута  $\angle CAM$ ?

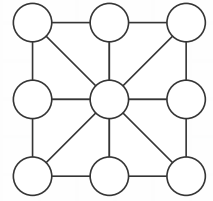
**А:**  $12,5^\circ$       **Б:**  $15^\circ$       **В:**  $27,5^\circ$       **Г:**  $42,5^\circ$       **Д:** Відповідь відрізняється від наведених

16 Скільки існує функцій  $f$ , для яких одночасно виконуються такі умови:

- 1)  $D(f) = \{1, 2, 3\}$ ;
- 2)  $E(f) \subset \{1, 2, 3\}$ ;
- 3)  $f(1) + f(2) + f(3) = 4$ ?

**A:** 2                      **Б:** 3                      **В:** 4                      **Г:** 5                      **Д:** 6

17 Дарина записує дев'ять цілих чисел у круги діаграми (див. мал.) так, щоби для кожного з восьми однакових маленьких трикутників, вершини яких з'єднані відрізками, суми чисел у вершинах були рівними. Яку найбільшу кількість різних чисел може використати дівчинка?



**A:** 1                      **Б:** 2                      **В:** 3                      **Г:** 5                      **Д:** 8

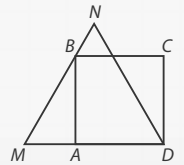
18 Рівняння  $x^2 + ax + b = 0$  та  $x^2 + bx + a = 0$  мають дійсні корені. Відомо, що сума квадратів коренів першого рівняння дорівнює сумі квадратів коренів другого. Чому дорівнює сума  $a + b$ , якщо  $a \neq b$ ?

**A:** 0                      **Б:** -2                      **В:** 4                      **Г:** -4                      **Д:** Неможливо визначити

19 Скільки дійсних коренів має рівняння  $(x^2 - 4x + 5)^{x^2 + x - 30} = 1$ ?

**A:** 1                      **Б:** 2                      **В:** 3                      **Г:** 4                      **Д:** 5

20 Периметр квадрата  $ABCD$  дорівнює 4 см. Чому дорівнює периметр рівностороннього трикутника  $MND$  (див. мал.)?



**A:** 4 см                      **Б:**  $(3 + \sqrt{3})$  см                      **В:** 3 см                      **Г:**  $(3 + \sqrt{2})$  см                      **Д:**  $(4 + \sqrt{3})$  см

## Завдання 21 – 30 оцінюються п'ятьма балами

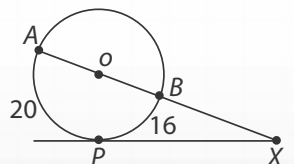
21  $(5 - \sqrt{24})^{\log_5(5 + \sqrt{24})} \cdot (5 - \sqrt{24})^{\log_{25}(\sqrt{24} - 5)^2} =$

**A:**  $5 + \sqrt{24}$                       **Б:**  $5 - \sqrt{24}$                       **В:** 1                      **Г:** -1                      **Д:** 2

22 Відношення периметра чотирикутника до довжини вписаного в нього кола дорівнює 4:3. Чому дорівнює відношення площі цього чотирикутника до площі круга, обмеженого цим колом?

**A:**  $4 : \pi$                       **Б:**  $3\sqrt{2} : \pi$                       **В:** 16 : 9                      **Г:**  $\pi : 3$                       **Д:** 4 : 3

23 Дуги  $AP$  і  $BP$  кола з центром у точці  $O$ , зображеного на малюнку, мають довжини 20 см і 16 см відповідно. Пряма  $XP$  – дотична до цього кола (див. мал.). Чому дорівнює градусна міра кута  $\angle AXP$ ?



**A:**  $30^\circ$                       **Б:**  $24^\circ$                       **В:**  $18^\circ$                       **Г:**  $15^\circ$                       **Д:**  $10^\circ$

**24** Чому дорівнює  $x_4$ , якщо  $x_1 = 2$  та  $x_{n+1} = x_n^{x_n}$  для всіх  $n \geq 1$ ?

- A:**  $2^{2^3}$       **Б:**  $2^{2^4}$       **В:**  $2^{2^{11}}$       **Г:**  $2^{2^{16}}$       **Д:**  $2^{2^{768}}$

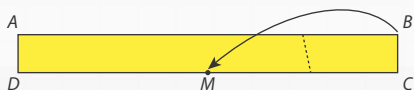
**25** Три натуральні числа складені з дев'яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, що всі цифри використані і жодна з них не повторюється двічі. Якому із чисел, запропонованих у відповідях, не може дорівнювати сума трьох складених чисел?

- A:** 1500      **Б:** 1503      **В:** 1512      **Г:** 1521      **Д:** 1575

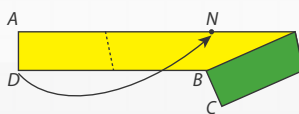
**26** З'єднавши внутрішню точку куба з усіма його вершинами, куб розбили на 6 пірамід. Об'єми п'яти з цих пірамід дорівнюють 2, 5, 10, 11 і 14. Чому дорівнює об'єм шостої піраміди?

- A:** 1      **Б:** 4      **В:** 6      **Г:** 9      **Д:** 12

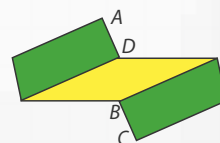
**27** Прямокутна смужка паперу ABCD, розфарбована у жовтий колір з одного боку і у зелений з іншого, має ширину 5 см і довжину 50 см. Христина складає цю смужку так, щоби вершина B збігалася з точкою M, що є серединою сторони CD (див. мал. 1), а вершина D збігалася з точкою N, що є серединою сторони AB (див. мал. 2). Чому дорівнює площа видимої жовтої частини смужки зображеної на малюнку 3?



мал. 1



мал. 2



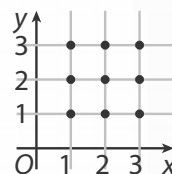
мал. 3

- A:**  $50 \text{ cm}^2$       **Б:**  $60 \text{ cm}^2$       **В:**  $62,5 \text{ cm}^2$       **Г:**  $100 \text{ cm}^2$       **Д:**  $125 \text{ cm}^2$

**28** На острові Лицарів та Брехунів кожен мешканець або лицар (той, хто завжди говорить правду), або брехун (той, хто завжди говорить неправду). Мандрівник зустрів на острові 7 осіб, що сиділи навколо багаття. Кожен із них сказав: «Я сиджу між двома брехунами!» Скільки брехунів було серед цих сімох мешканців острова?

- A:** 2      **Б:** 3      **В:** 4      **Г:** 5      **Д:** 6

**29** Скільки існує нерівних квадратичних функцій  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), графік кожної з яких проходить через три з дев'яти точок, позначених на малюнку?



- A:** 6      **Б:** 15      **В:** 19      **Г:** 22      **Д:** 27

**30** Для якого найменшого значення параметра  $a$  рівняння  $2^{\sin x} + 2^{\cos x} = 2^{a + \frac{\sqrt{2}}{2}}$  має дійсні розв'язки?

- A:**  $-\sqrt{2}$       **Б:**  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       **В:** 1      **Г:**  $1 - \sqrt{2}$       **Д:** 0